Theorie Woche 3:

∘ Givensrotation: Skript S. 22

Beschreibt eine Rotation (meist im mathematisch positiven Sinn <=> Gegenuhrzeigersinn) in einer, von 2 Koordinatenachsen aufgespannten, Ebene.

Wir müssen mehrere Feinheiten unterscheiden, um Verwirrung zu vermeiden:

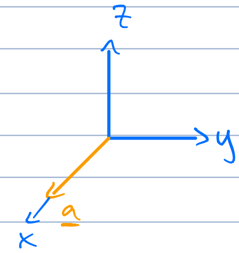
- Die Givensrotation lässt sich durch eine orthogonale Matrix der Form

$$\underline{G}(i,k,\theta) = \begin{array}{c c}
\begin{bmatrix}
1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\
0 & 1 & \cdots & 0 & & \vdots & & \vdots \\
\vdots & & \ddots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
0 & \cdots & \cdots & c & \cdots & s & \cdots & 0 \\
0 & & & \vdots & 1 & \vdots & & \vdots \\
\vdots & & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
0 & \cdots & \cdots & -s & \cdots & c & \cdots & 0 \\
\vdots & & & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & \cdots & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1
\end{bmatrix} &
\begin{array}{c} \\ \\ \\ \leftarrow i \\ \\ \\ \leftarrow k \\ \\ \\ \end{array} \\
\begin{array}{c c c c c c c c c} & & & \uparrow & & \uparrow & & & \\ & & & i & & k & & & \end{array} &
\end{array}$$

  beschreiben, wobei $c = \cos(\theta)$ und $s = \sin(\theta)$ in der i-ten und k-ten Zeile und Spalte erscheinen.
  Eine solche Matrix heisst <u>Givens-Matrix</u> und sie beschreibt eine Drehung im mathematisch positiven Sinn in derjenigen Ebene, welche von dem i-ten und k-ten Koordinatenvektor aufgespannt wird.

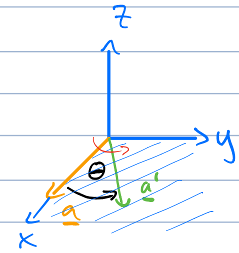
⚠ Es gibt eine Ausnahme zur Regel, liegen die gewählten Koordinatenvektoren unmittelbar nebeneinander (sprich sie bilden ein "Päckchen"), so ist das (−) oben rechts statt unten links anzubringen, um eine Drehung in math. pos. Richtung zu erzielen. $\rightarrow$ Für G.R. egal!

Beispiel 3.1: G.R. in $\mathbb{R}^3$ $\quad \underline{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \rightsquigarrow$



(i) Drehung in der xy-Ebene um θ:

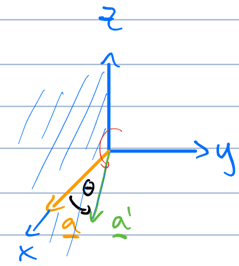
$$\underline{\underline{G}}(1,2,\theta) = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ \begin{array}{ccc} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ x & y & z \end{array} \end{array} \rightsquigarrow$$



$$\Rightarrow \underline{a}' = \underline{\underline{G}}(1,2,\theta) \cdot \underline{a} = \begin{bmatrix} c & -s & 0 \\ s & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \\ 0 \end{bmatrix}}}$$

(ii) Drehung in der xz-Ebene um θ:

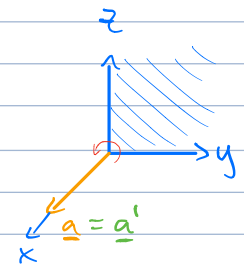
$$\underline{\underline{G}}(1,3,\theta) = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix} \\ \begin{array}{ccc} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ x & y & z \end{array} \end{array} \rightsquigarrow$$



$$\Rightarrow \underline{a}' = \underline{\underline{G}}(1,3,\theta) \cdot \underline{a} = \begin{bmatrix} c & 0 & s \\ 0 & 1 & 0 \\ -s & 0 & c \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} \cos\theta \\ 0 \\ -\sin\theta \end{bmatrix}}}$$

(iii) Drehung in der yz-Ebene um θ:

$$\underline{\underline{G}}(2,3,\theta) = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \\ \begin{array}{ccc} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ x & y & z \end{array} \end{array} \rightsquigarrow$$



$$\Rightarrow \underline{a}' = \underline{\underline{G}}(2,3,\theta) \cdot \underline{a} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c & -s \\ 0 & s & c \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}}$$

$\rightsquigarrow$ Logischerweise keine Änderung, da bereits auf der x-Achse!

o QR-Zerlegung mittels Givens-Rotation:

Ein stabiles Verfahren zur Bildung der ZSF, somit für numerische Anwendungen dem Gauss-Verfahren klar vorzuziehen.

Kochrezept:

(i) Möchte ZSF erreichen → analog zu Gauss, jedoch mit neuen Operationen

(ii) Will man den Eintrag an der Matrixposition (i,j) zu null transformieren, so setzt man

$$c = \frac{a_{jj}}{p}, \quad s = \frac{a_{ij}}{p} \quad \text{mit} \quad p = \operatorname{sgn}(a_{ii})\sqrt{a_{jj}^2 + a_{ij}^2}$$

wobei sgn := Signum einfach das Vorzeichen des jeweiligen Koeffizienten zurückgibt.

⚠ Grosse Verwirrungsgefahr bei der Bezeichnung einer Givens Matrix: $\underline{\underline{G}}_{1,2}$:= Eliminiert a_{21} !

(iii) Man bildet $\underline{\underline{Q}} = (\underline{\underline{G}}_n \cdot \underline{\underline{G}}_{n-1} \cdot \ldots \cdot \underline{\underline{G}}_2 \cdot \underline{\underline{G}}_1)^T$ und erhält $\underline{\underline{Q}} \cdot \underline{\underline{R}} = \underline{\underline{A}}$, wobei $\underline{\underline{G}}_1$ die erste Givens-Matrix, $\underline{\underline{G}}_2$ die zweite usw. ist.

(Warum muss man die Transponierte bilden?

↳ $\underline{\underline{G}}$ ist orthogonal ⇒ $\underline{\underline{G}}_n \cdot \underline{\underline{G}}_{n-1} \cdot \ldots \cdot \underline{\underline{G}}_1$ ist orthogonal

⇒ $(\underline{\underline{G}}_n \cdot \ldots \cdot \underline{\underline{G}}_1)^T = (\underline{\underline{G}}_n \cdot \ldots \cdot \underline{\underline{G}}_1)^{-1} = \underline{\underline{Q}}$, ebenfalls orthogonal

⇒ Wir wissen, dass $\underline{\underline{G}}_n \cdot \underline{\underline{G}}_{n-1} \cdot \ldots \cdot \underline{\underline{G}}_1 \cdot \underline{\underline{A}} = \underline{\underline{R}}$ aus (ii)

⇒ $\underline{\underline{A}} = (\underline{\underline{G}}_n \cdot \ldots \cdot \underline{\underline{G}}_1)^{-1} \underline{\underline{R}} = (\underline{\underline{G}}_n \cdot \ldots \cdot \underline{\underline{G}}_1)^T \underline{\underline{R}} = \underline{\underline{Q}} \cdot \underline{\underline{R}}$)

Beispiel 3.2: $\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$

(i) Müssen a_{21} eliminieren.

(ii) $p = \operatorname{sgn}(a_{ii})\sqrt{a_{jj}^2 + a_{ij}^2} = \operatorname{sgn}(a_{22})\sqrt{a_{11}^2 + a_{21}^2} = +\sqrt{1+1} = \underline{\sqrt{2}}$

$$c = \frac{a_{jj}}{p} = \frac{a_{11}}{\sqrt{2}} = \underline{\frac{1}{\sqrt{2}}}, \quad s = \frac{a_{ij}}{p} = \frac{a_{21}}{\sqrt{2}} = \underline{-\frac{1}{\sqrt{2}}}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{G}}_{1,2} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} = \underline{\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{A}}' = \underline{\underline{G}}_{1,2} \cdot \underline{\underline{A}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$$

$$= \underline{\underline{\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 7 \end{bmatrix}}} = \underline{\underline{R}}$$

(iii) $\underline{\underline{Q}} = \underline{\underline{G}}_{1,2}^T = \underline{\underline{\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}}} \Rightarrow \underline{\underline{A}} = \underline{\underline{Q}} \cdot \underline{\underline{R}}$

Bemerkung: Bräuchte man mehr Eliminationsschritte, so müsste man die jeweiligen Givens-Matrizen einfach mit dem <u>bereits veränderten</u> $\underline{A}'$ berechnen und von links anfügen.

Bemerkung: Man kann die Givens-Matrix auch ohne die obigen Formeln, sondern mit einem Koeffizientenvergleich finden, dies werden wir in der Übungsstunde betrachten!

o Housholdertransformation (Spiegelung):

Beschreibt die Spiegelung eines Vektors an einer Hyperebene durch Null im euklidischen Raum. Im dreidimensionalen Raum ist sie somit eine Spiegelung an einer Ebene durch den Ursprung. Die Darstellungsmatrix dieser linearen Abbildung nennt man <u>Householder-Matrix.</u>

Die Spiegel-Hyperebene kann durch einen Normalvektor $\underline{v}$, also einen Vektor, der orthogonal zur Hyperebene ist, definiert werden. Ist $\underline{v}$ als Spaltenvektor gegeben und I_n die n-dimensionale Einheitsmatrix, dann wird die oben beschriebene lineare Abbildung durch die folgende Matrix dargestellt:

$$\underline{\underline{H}} = \underline{\underline{I_n}} - \frac{2}{\underline{v}^T\underline{v}} \underline{v}\underline{v}^T$$

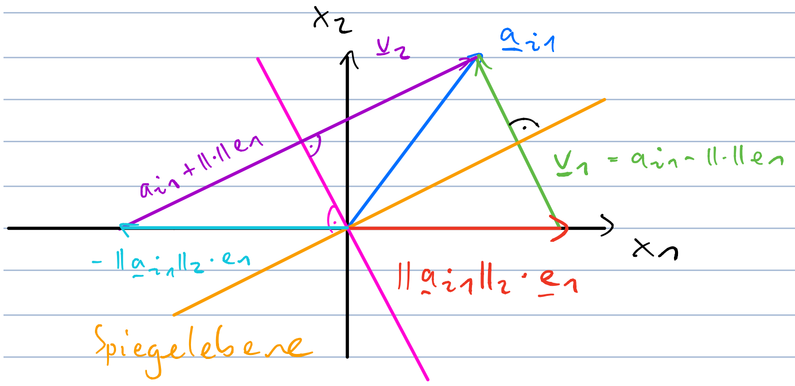
Bemerkung: Ist $\underline{v}$ auf die Länge 1 normiert, also $\underline{v}^T\underline{v} = 1$, so vereinfacht sich die Formel zu

$$\underline{\underline{H}} = \underline{\underline{I}} - 2\underline{v}\underline{v}^T$$

o QR-Zerlegung mittels Housholdertransformation:

Absolut analoges Vorgehen zu oben, ausser, dass das Werkzeug wieder ändert: Nun darf man nur mit Spiegelungen Gaussen. Aber, wie findet man $\underline{v}$?

Wir betrachten es grafisch:



mit $\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} | & | & & | \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ | & | & & | \end{bmatrix}$

und $e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ \\ 0 \end{bmatrix}$

$\rightsquigarrow$ Wir können $\underline{v}$ also einfach erhalten, indem wir den zu spiegelnden Spaltenvektor a_{i1} minus den Zielvektor auf der x_1-Achse (mit der Länge von a_{i1}, da längentreue Abbildung !) rechnen.

Beispiel 3.3:

$$\underline{a}_{i1} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \|\underline{a}_{i1}\|_2 = \sqrt{4+4+1} = \sqrt{9} = \underline{3}, \quad \underline{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \underline{v} = \underline{a}_{i1} \pm \|\underline{a}_{i1}\|_2 \, \underline{e}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \underline{\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}}$$

beides möglich !

$$\Rightarrow \underline{u} = \frac{1}{\|\underline{v}\|_2} \underline{v} = \frac{1}{\sqrt{1+4+1}} \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{6}} \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

(normieren, geht auch später wie oben gezeigt)

$$\Rightarrow \underline{\underline{H}} = \underline{\underline{I}} - \frac{2}{\underline{v}^T \underline{v}} \underline{v}\underline{v}^T = \underline{\underline{I}} - 2 \underline{u}\underline{u}^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \frac{2}{6} \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & & \emptyset \\ & 1 & \\ \emptyset & & 1 \end{bmatrix} - \frac{2}{6} \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -2 & 4 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \underline{\underline{\frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -2 \\ 1 & -2 & 2 \end{bmatrix}}} = \underline{\underline{H}}$$

$\Rightarrow \underline{\underline{H}} \cdot \underline{a}_{i1} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, wissen wir ja schon von oben.

Bemerkung: Q wäre wie oben schlussendlich $(H_n \cdot \ldots \cdot H_1)^T$.
Muss man auch die 2. Spalte von $\underline{\underline{A}}$, also a_{i2}, spiegeln,
so spiegelt man natürlich auf $\underline{e}_2$ usw. !